重庆理工大学

2012年9月24日

# 初等数学问题的微积分思考

陆 征 一

四川师范大学数学与软件科学学院

中国科学院成都计算机应用研究所

# 初等数学问题的微积分思考

- 初等数学问题　　　归纳法应用

- 主要内容:

★ 公理化论证欣赏
★ 三角函数
★ 平均不等式
★ 根与复数
★ 函数方程
★ 线性相关性
★ 多项式重根
★ 归纳法举例

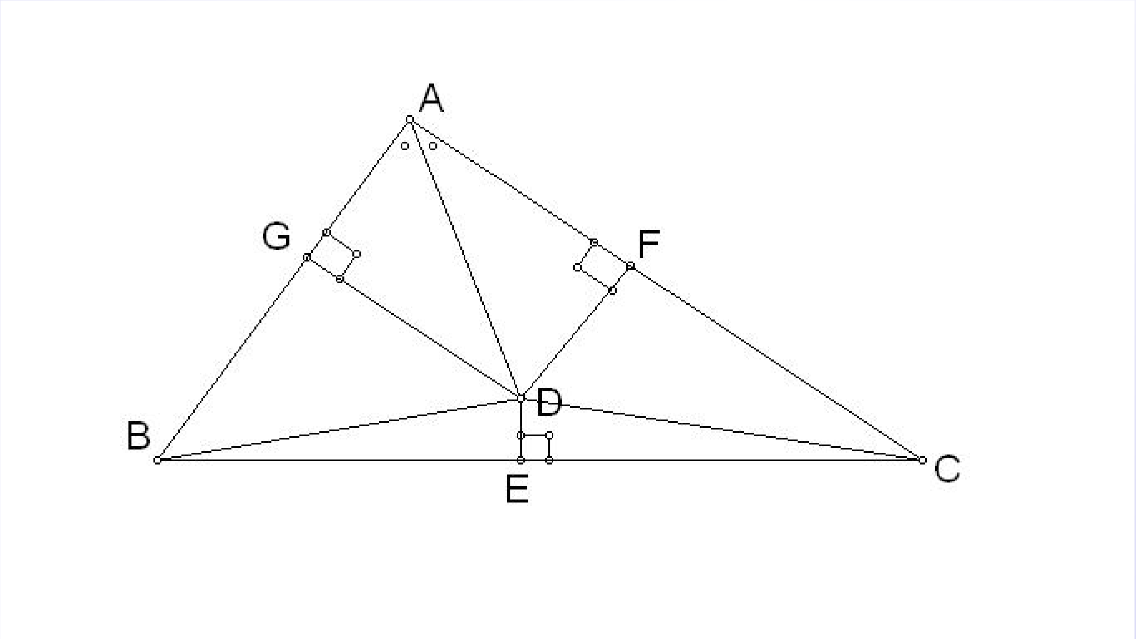
# 1 公理化论证欣赏

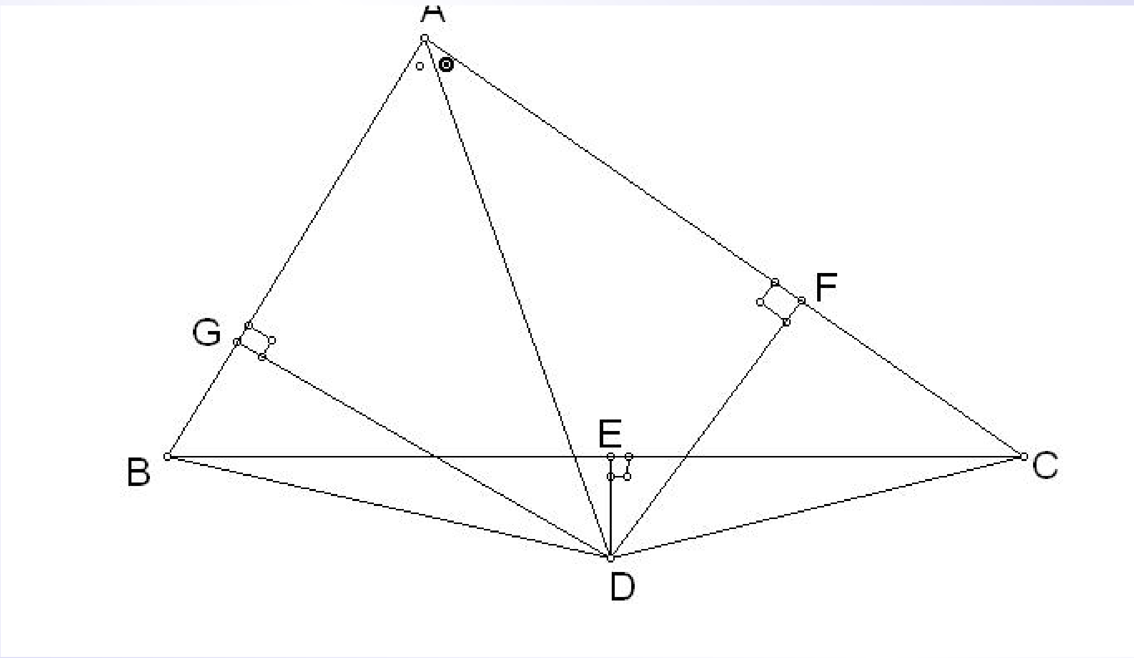
- **命题1：** 无理数$^{\text{无理数}}$ （不必=） 无理数.

解: $\sqrt{2}$-无理数，$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\begin{cases}\text{有理数} & (1)\\ \text{无理数} & (2)\end{cases}$

(1)O.K.　(2)再考虑$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}=2.$

任意三角形为等腰三角形。





A
G
F
E
B
C
D

## 2 三角函数

- 正弦函数的最小正周期: 求 $f(x) = \sin x$ 的周期.

解: 设$T$为$f(x)$的最小正周期, $\forall x \in R$ :

$$f(x) \equiv f(x+T)$$

$$\Rightarrow \sin x \equiv \sin(x+T)$$

$$\Rightarrow \sin\frac{T}{2}\cos(x+\frac{T}{2}) \equiv 0.$$

令 $x = \pi - \frac{T}{2} \Rightarrow \sin\frac{T}{2} = 0$

$$\Rightarrow \frac{T}{2} = k\pi \Rightarrow T = 2k\pi \Rightarrow T_0 = 2\pi.$$

- 正弦函数之和的周期

- 求$f(x) = \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{3}$的周期.

解: 因为$\sin\frac{x}{2}$的周期为$4\pi$, $\sin\frac{x}{3}$的周期为$6\pi$.

由最小公倍数"结论": $f(x)$的周期为$12\pi$.

(结论: $f_1(x) \sim nT, f_2(x) \sim mT \Longrightarrow f_1(x) + f_2(x) \sim [n, m]T.$)

1. 一般成立?

2. 来自何处?

分析: $f_1(x) \sim nT,\ f_2(x) \sim mT,\ (m,n)=1.$

由命题: $\Rightarrow f(x)=f_1(x)+f_2(x) \dashrightarrow mnT$

恒等变形: $f(x)+(-f_1(x))=f_2(x)$

已知: $-f_1(x) \sim nT, f(x) \sim mnT$

由命题: $\Rightarrow f_2(x) \dashrightarrow mnT$ 矛盾





访问主页
标题页
◀◀ ▶▶
◀ ▶
第 8 页 共 29 页
返回
全屏显示
关闭
退出

例: 1). 求 $f_1(x)=\sin(\frac{x}{3})-\sin(\frac{x}{2})$ 的周期.

2). 求 $f_2(x)=\sin(\frac{x}{2})$ 的周期.

$f_1(x)\to 12\pi$, $f_2(x)\to 4\pi$.

验证: $f_1(x)+f_2(x)\to 6\pi$.

最小公倍数: $f_1(x)+f_2(x) \dashrightarrow 12\pi$.

命题: $f(x)=\sin\frac{x}{m}+\sin\frac{x}{n}$ ($n>m$, $m,n$为正整数), 周期为$2[m,n]\pi$.

一般: $f(x)=\sum_{i=0}^{n}\sin\frac{x}{n_i}$ ($n_i$正整数) 的最小正周期为$T=2[n_1,\cdots,n_k]\pi$.

( 吴乐丹02 )

- 不等式

命题: $A, B, C$ 为△三内角, 则

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3}{2}\sqrt{3} \qquad (*)$$

当且仅当正三角形时等号成立.

证明: 记$y = \sin A + \sin B + \sin C$,

要证（*）成立, 只需证$y$的最大值$y_{max}$为$\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 且此时$A = B = C$.

反设$y$取最大值时, $A, B, C$不全等.

不妨设$A \neq B$. 此时

$$\begin{aligned} y_{max} &= \sin A + \sin B + \sin C \\ &= 2\sin\tfrac{A+B}{2}\cos\tfrac{A-B}{2} + \sin C \\ &< 2\sin\tfrac{A+B}{2} + \sin C \\ &= \sin\tfrac{A+B}{2} + \sin\tfrac{A+B}{2} + \sin C \end{aligned}$$

（此说明存在以$\dfrac{A+B}{2}, \dfrac{A+B}{2}, C$ 为内角的另一三角形,其正弦和更大）矛盾.

故当且仅当$A = B = C$ 时, $y$取最大

$$y_{max} = \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

证毕.

# 3 算术平均与几何平均

命题: 正数$a_1, \cdots, a_n$, 则

$$\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.$$

等价命题: 正数$x_1\cdots x_n = 1$, 则( 令$x_i = \frac{a_i}{(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}}$ )

$$x_1+\cdots+x_n \geq n.$$

问题: 如何证?

- 归纳法

例1. $x_1x_2x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 3.$

证: $x_1 + x_2 + x_3 + 1 \geq 2\sqrt{x_1x_2} + 2\sqrt{x_3} \geq 2 \cdot 2\sqrt[4]{x_1x_2x_3} = 4.$

等价命题的证明:

- $n=2^m$时:

归纳法: 显然$m=1$ 成立

设$m-1$ 成立,则

$$x_1+\cdots+x_{2^m} \geq \underbrace{2\sqrt{x_1x_2}+2\sqrt{x_3x_4}+\cdots+2\sqrt{x_{2^m-1}x_{2^m}}}_{2^{m-1}\text{项}}$$

$$(\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_3x_4}\cdot\cdots\cdot\sqrt{x_{2^m-1}x_{2^m}}=1)$$

$$\geq 2\cdot 2^{m-1}=2^m.$$

- 一般$n$： $2^{m-1} < n < 2^m$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{(2^m - n)} \geq 2^m, \quad (共 2^m)$$

$$(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdot 1 \cdots 1 = 1).$$

故$x_1 + \cdots + x_n \geq n.$

- 利用最值讨论

另证: $x_1\cdots x_n=1$, 记$y=x_1+\cdots+x_n$.

设$y$取最小值$y_{min}$ ,但$x_i$ 不全等, 不妨设$x_1\neq x_2$, 则

$$
\begin{aligned}
y_{min} &= x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n \\
&> 2\sqrt{x_1x_2}+x_3+\cdots+x_n \\
&= \sqrt{x_1x_2}+\sqrt{x_1x_2}+x_3+\cdots+x_n \\
&\quad (\sqrt{x_1x_2}\cdot\sqrt{x_1x_2}\cdot x_3\cdots x_n=1)
\end{aligned}
$$

与$y_{min}$ 最小矛盾.

故$y_{min}$ 最小$\Rightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n,\Rightarrow$

$$x_1+\cdots+x_n=y\geq y_{min}=n.$$

- 问题: 全世界最简单的证明?
- 问题: 证明是否正确?

说明: 1. 三角函数$y = \sin A + \sin B + \sin C$ 所考虑的区域为

$$E_1 = \{(A, B, C)|0 \leq A, B, C, A + B + C = \pi\}.$$

2. $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 所考虑的区域为

$$E_2 = \{(x_1, \cdots, x_n)|0 < x_i; x_1 \cdots x_n = 1\}$$

$E_1$一有界闭域, $E_2$一无界开域.

数学分析定理:闭区域上连续函数必有最大、最小值.

1. O.K.

2. 补证: 如果$\forall i, x_i \le n \Rightarrow$ (由$\prod_{i=1}^{n} x_i = 1$) $\quad x_i \ge \dfrac{1}{n^{n-1}}$

记$E = \{x \in intR_+^n | \dfrac{1}{n^{n-1}} \le x_i \le n, i = 1, \cdots, n\}$

因为当$x_i = 1\ (\forall i)$ 时,$y = n$,

而当$x \in intR_+^n \backslash E$ 时, $y > n$,

又$E$ 为闭集,故(连续函数)

$$y_{min} \in E \subset intR_+^n.$$

存在性证得.

# 4 复数与开根号

**问题:** $(-8)^{\frac{2}{6}} = ?$, **例:** $((-8)^{\frac{1}{3}} = -2)$

**初中:** 负数可开奇次方?

**高中:** 指数运算底数为正?

**复数观点:**

$$令 (-8)^{\frac{1}{3}} = x$$

$$\Leftrightarrow x^3 = -8$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-2x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -2(\text{实根}), x_{2,3} = \text{复根}.$$

又令

$$
\begin{aligned}
(-8)^{\frac{2}{6}} = x \ &\Leftrightarrow \ x^6 - (-8)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \ (x^3+8)(x^3-8) = 0 \\
&\Leftrightarrow \ (x+2)(x-2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4) = 0
\end{aligned}
$$

故二实根$x_1 = 2, x_2 = -2,$

(四复根(两两共轭))

故

$$
(-8)^{\frac{2}{6}} = \begin{cases} 2, \\ -2. \end{cases}
$$

# 5 函数方程

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad \ln xy = \ln x + \ln y$$

问题： 已知

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (f'(0)\text{存在}, \ f(0) \neq 0)$$

则$f(x) = e^{cx}$?

同样：

$$g(xy) = g(x) + g(y),$$

$$g(x) = \ln x?$$

系统科学研究所

解: 由$f(x+y)=f(x)f(y)$ 得$(f(0)=1)$:

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y}=f(x)\frac{f(y)-f(0)}{y}$$

令$y\to 0$

$$f'(x)=f(x)f'(0)$$

故: $f(x)=e^{f'(0)x}.$

# 6 线性相关性

已知：

$$3x - 5y + 2z = -4,$$

$$7x - 4y - 3z = 3,$$

求：

$$5x + 7y - 12z = (18)\,,$$

$$15x - 2y - 13z = (17)\,,$$

$$x + y + z = (?)\,,$$

$$x + 2y + 3z = (?)\,.$$

# 7 多项式重根

定理1. 如果$(x-a)^k|f(x)$, 则$(x-a)^{k-1}|f'(x)$.

( $(x-a)$ 为$f(x)$ 的$k$ 重因式$\Rightarrow$ $(x-a)$ 为$f'(x)$ 的$k-1$重因式)

推论1. $(x-a)$ 为$f(x)$的重因式,当且仅当$(x-a)$ 为$f(x), f'(x)$ 的公因式.

例1. 给出$f(x)=x^2+ax+b=0$ 存在重根的充要条件.

解: $f'(x)=2x+a=2(x+\frac{a}{2})$

求公因式 $f(x)\diagup f'(x)$ :

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}(x+\frac{a}{2})f'(x)+b-(\frac{a}{2})^2$$

如果$c$ 为重根$\Rightarrow x-c|f(x),f'(x)\Rightarrow x-c|b-\frac{a^2}{4}$

$$\Rightarrow b-\frac{a^2}{4}=0.\Rightarrow \Delta=a^2-4b=0.$$

例2. 求$f(x) = x^3 + (a-2)x^2 + (1-2a)x + a$ 有三重根的条件.

解: $\because f'(x) = 3x^2 + 2(a-2)x + (1-2a), f''(x) = 6x + 2(a-2).$

$(x-c)^3|f(x) \Rightarrow (x-c)^2|f'(x) \Rightarrow (x-c)|f''(x) \Rightarrow f'(x), f''(x)$有公根

$\Rightarrow f''(x) = 0$ 的解使$f'(x) = 0 \Rightarrow (a+1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1.$

# 8 归纳法举例

插曲1. (疯狗判定问题):

有一村落

1. 每家养一只狗,每天遛狗一次（同时）;
2. 主人只能辨别别人的狗是否为疯;
3. 实际每只狗为疯;
4. 一旦发现（判断）自己狗为疯,则猎杀.

某一天,一路人:至少有一疯狗.

问题: 结果会怎样?

解答: $n = 2, 3$ 易解. 一般$n$?

插曲2. (连续自然数判定)

由甲分别提供二连续自然数给乙, 丙

(乙、丙只知道自己的数且知道连续, 乙、丙同等聪明)

然后由甲连续提问:知不知道?

当问过若干次以后,乙、丙二人之一必定知道对方数字!

问题: 为什么?

例: 4895, 4896.

# 谢　谢！