



重庆理工大学
2012年9月24日

初等数学问题的微积分思考

陆 征 一

四川师范大学数学与软件科学学院
中国科学院成都计算机应用研究所



系统科学研究所

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

访问主页

标题页



第 1 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出



系统科学研究所

初等数学问题的微积分思考



初等数学问题

归纳法应用



主要内容:

- ★ 公理化论证欣赏
- ★ 三角函数
- ★ 平均不等式
- ★ 根与复数
- ★ 函数方程
- ★ 线性相关性
- ★ 多项式重根
- ★ 归纳法举例

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

访问主页

标题页



第 2 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出

1 公理化论证欣赏

- **命题1:** 无理数^{无理数} (不必=) 无理数.

$$\text{解: } \sqrt{2}\text{-无理数, } \sqrt{2}^{\sqrt{2}} \begin{cases} \text{有理数} & (1) \\ \text{无理数} & (2) \end{cases}$$

$$(1)\text{O.K.} \quad (2)\text{再考虑 } \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 2.$$

[访问主页](#)[标题页](#)

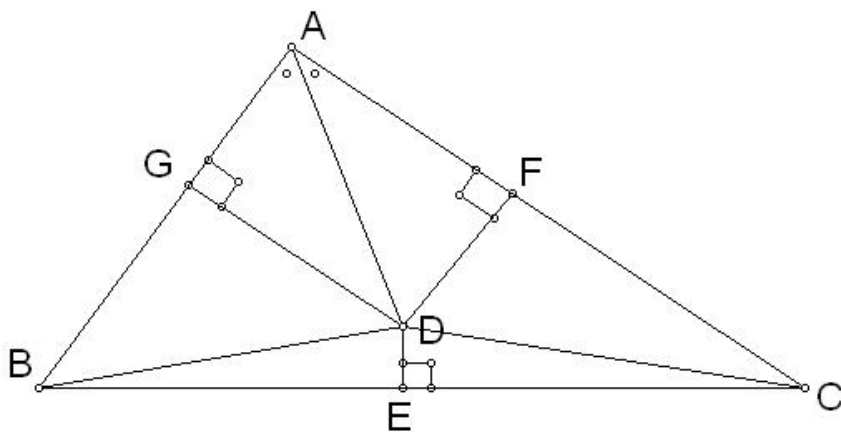
第 3 页 共 29 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



系统科学研究所

任意三角形为等腰三角形。



公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

访问主页

标题页



第 4 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出



系统科学研究所

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

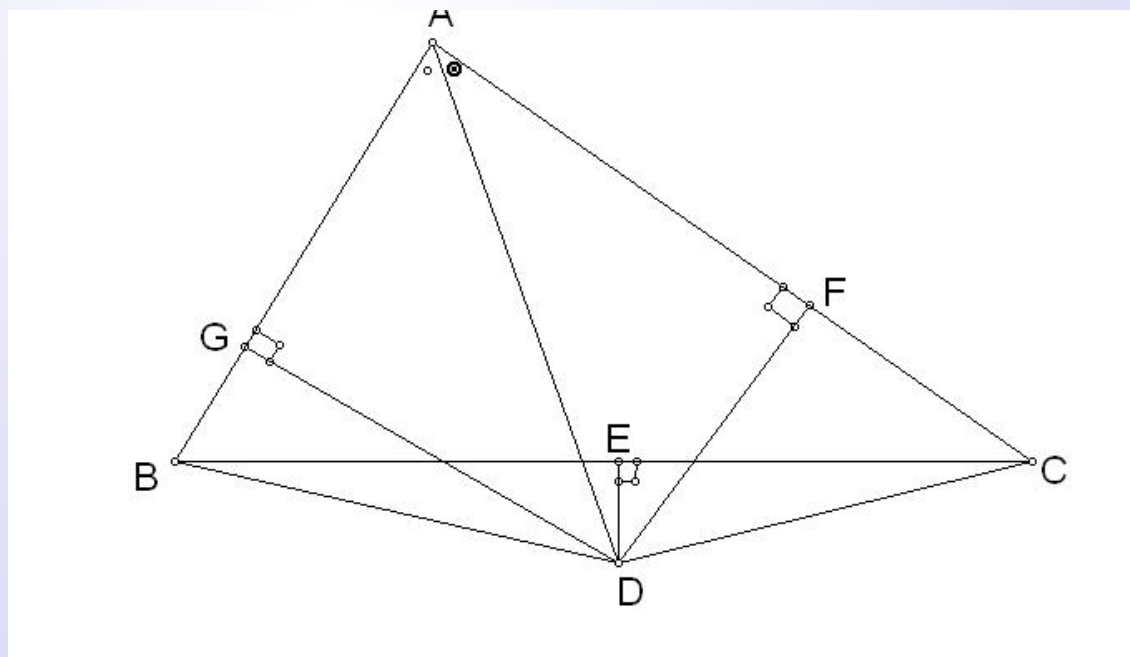
复数与开根号

函数方程

线性相关性

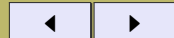
多项式重根

归纳法举例



访问主页

标题页



第 5 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出



2 三角函数

- 正弦函数的最小正周期: 求 $f(x) = \sin x$ 的周期.

解: 设 T 为 $f(x)$ 的最小正周期, $\forall x \in R$:

$$f(x) \equiv f(x + T)$$

$$\Rightarrow \sin x \equiv \sin(x + T)$$

$$\Rightarrow \sin \frac{T}{2} \cos(x + \frac{T}{2}) \equiv 0.$$

$$\text{令 } x = \pi - \frac{T}{2} \Rightarrow \sin \frac{T}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{T}{2} = k\pi \Rightarrow T = 2k\pi \Rightarrow T_0 = 2\pi.$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 6 页 共 29 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



- 正弦函数之和的周期

- 求 $f(x) = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3}$ 的周期.

解: 因为 $\sin \frac{x}{2}$ 的周期为 4π , $\sin \frac{x}{3}$ 的周期为 6π .

由最小公倍数”结论”: $f(x)$ 的周期为 12π .

(结论: $f_1(x) \sim nT, f_2(x) \sim mT \implies f_1(x) + f_2(x) \sim [n, m]T$.)

1. 一般成立?

2. 来自何处?

访问主页

标题页



第 7 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出



系统科学研究所

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

访问主页

标题页



第 8 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出

分析: $f_1(x) \sim nT$, $f_2(x) \sim mT$, $(m, n) = 1$.

由命题: $\Rightarrow f(x) = f_1(x) + f_2(x) \dashrightarrow mnT$

恒等变形: $f(x) + (-f_1(x)) = f_2(x)$

已知: $-f_1(x) \sim nT$, $f(x) \sim mnT$

由命题: $\Rightarrow f_2(x) \dashrightarrow mnT$ 矛盾

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 9 页 共 29 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

例: 1). 求 $f_1(x) = \sin\left(\frac{x}{3}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ 的周期.

2). 求 $f_2(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ 的周期.

$f_1(x) \rightarrow 12\pi, f_2(x) \rightarrow 4\pi.$

验证: $f_1(x) + f_2(x) \rightarrow 6\pi.$

最小公倍数: $f_1(x) + f_2(x) \rightarrow 12\pi.$

命题: $f(x) = \sin \frac{x}{m} + \sin \frac{x}{n}$ ($n > m, m, n$ 为正整数), 周期为 $2[m, n]\pi.$

一般: $f(x) = \sum_{i=0}^n \sin \frac{x}{n_i}$ (n_i 正整数) 的最小正周期为 $T = 2[n_1, \dots, n_k]\pi.$

(吴乐丹02)



系统科学研究所

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

访问主页

标题页



第 10 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出

● 不等式

命题: A, B, C 为 \triangle 三内角, 则

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3}{2}\sqrt{3} \quad (*)$$

当且仅当正三角形时等号成立.

证明: 记 $y = \sin A + \sin B + \sin C$,

要证 (*) 成立, 只需证 y 的最大值 y_{max} 为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ 且此时 $A = B = C$.

反设 y 取最大值时, A, B, C 不全等.



不妨设 $A \neq B$. 此时

$$\begin{aligned}y_{max} &= \sin A + \sin B + \sin C \\&= 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + \sin C \\&< 2 \sin \frac{A+B}{2} + \sin C \\&= \sin \frac{A+B}{2} + \sin \frac{A+B}{2} + \sin C\end{aligned}$$

(此说明存在以 $\frac{A+B}{2}, \frac{A+B}{2}, C$ 为内角的另一三角形, 其正弦和更大) **矛盾.**

故当且仅当 $A = B = C$ 时, y 取最大

$$y_{max} = \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

证毕.

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 11 页 共 29 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



3 算术平均与几何平均

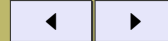
命题: 正数 a_1, \dots, a_n , 则

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

等价命题: 正数 $x_1 \cdots x_n = 1$, 则(令 $x_i = \frac{a_i}{(a_1 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}}$)

$$x_1 + \dots + x_n \geq n.$$

问题: 如何证?

[访问主页](#)[标题页](#)

第 12 页 共 29 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



系统科学研究所

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

• 归纳法

例1. $x_1x_2x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 3$.

证: $x_1 + x_2 + x_3 + 1 \geq 2\sqrt{x_1x_2} + 2\sqrt{x_3} \geq 2 \cdot 2\sqrt[4]{x_1x_2x_3} = 4$.

访问主页

标题页



第 13 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出

[访问主页](#)[标题页](#)

第 14 页 共 29 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

等价命题的证明:

• $n = 2^m$ 时:

归纳法: 显然 $m = 1$ 成立

设 $m - 1$ 成立, 则

$$\begin{aligned}x_1 + \cdots + x_{2^m} &\geq \underbrace{2\sqrt{x_1x_2} + 2\sqrt{x_3x_4} + \cdots + 2\sqrt{x_{2^{m-1}}x_{2^m}}}_{2^{m-1}\text{项}} \\ &\quad (\sqrt{x_1x_2} \cdot \sqrt{x_3x_4} \cdots \sqrt{x_{2^{m-1}}x_{2^m}} = 1) \\ &\geq 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m.\end{aligned}$$



系统科学研究所

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

- 一般 n : $2^{m-1} < n < 2^m$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{(2^m - n)} \geq 2^m, \quad (\text{共}2^m)$$

$$(x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdot 1 \cdots 1 = 1).$$

故 $x_1 + \cdots + x_n \geq n$.

访问主页

标题页



第 15 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出



● 利用最值讨论

另证: $x_1 \cdots x_n = 1$, 记 $y = x_1 + \cdots + x_n$.

设 y 取最小值 y_{min} , 但 x_i 不全等, 不妨设 $x_1 \neq x_2$, 则

$$\begin{aligned} y_{min} &= x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \\ &> 2\sqrt{x_1 x_2} + x_3 + \cdots + x_n \\ &= \sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_1 x_2} + x_3 + \cdots + x_n \\ &\quad (\sqrt{x_1 x_2} \cdot \sqrt{x_1 x_2} \cdot x_3 \cdots x_n = 1) \end{aligned}$$

与 y_{min} 最小矛盾.

故 y_{min} 最小 $\Rightarrow x_1 = x_2 = \cdots = x_n, \Rightarrow$

$$x_1 + \cdots + x_n = y \geq y_{min} = n.$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 16 页 共 29 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



- 问题: 全世界最简单的证明?
- 问题: 证明是否正确?

说明: 1. 三角函数 $y = \sin A + \sin B + \sin C$ 所考虑的区域为

$$E_1 = \{(A, B, C) | 0 \leq A, B, C, A + B + C = \pi\}.$$

2. $y = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ 所考虑的区域为

$$E_2 = \{(x_1, \cdots, x_n) | 0 < x_i; x_1 \cdots x_n = 1\}$$

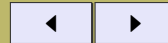
E_1 —有界闭域, E_2 —无界开域.

数学分析定理: 闭区域上连续函数必有最大、最小值.

1. O.K.

访问主页

标题页



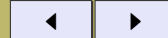
第 17 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出

[访问主页](#)[标题页](#)

第 18 页 共 29 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)

2. 补证: 如果 $\forall i, x_i \leq n \Rightarrow$ (由 $\prod_{i=1}^n x_i = 1$) $x_i \geq \frac{1}{n^{n-1}}$

记 $E = \{x \in \text{int}R_+^n \mid \frac{1}{n^{n-1}} \leq x_i \leq n, i = 1, \dots, n\}$

因为当 $x_i = 1 (\forall i)$ 时, $y = n$,

而当 $x \in \text{int}R_+^n \setminus E$ 时, $y > n$,

又 E 为闭集,故(连续函数)

$$y_{\min} \in E \subset \text{int}R_+^n.$$

存在性证得.



4 复数与开根号

问题: $(-8)^{\frac{2}{6}} = ?$, 例: $((-8)^{\frac{1}{3}} = -2)$

初中: 负数可开奇次方?

高中: 指数运算底数为正?

复数观点:

$$\text{令 } (-8)^{\frac{1}{3}} = x$$

$$\Leftrightarrow x^3 = -8$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = -2(\text{实根}), x_{2,3} = \text{复根.}$$

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 19 页 共 29 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



系统科学研究所

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

访问主页

标题页



第 20 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出

又令

$$\begin{aligned}(-8)^{\frac{2}{6}} = x &\Leftrightarrow x^6 - (-8)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^3 + 8)(x^3 - 8) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x + 2)(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4) = 0\end{aligned}$$

故二实根 $x_1 = 2, x_2 = -2,$

(四复根(两两共轭))

故

$$(-8)^{\frac{2}{6}} = \begin{cases} 2, \\ -2. \end{cases}$$



5 函数方程

$$e^{x+y} = e^x e^y, \quad \ln xy = \ln x + \ln y$$

问题： 已知

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (f'(0) \text{存在}, f(0) \neq 0)$$

则 $f(x) = e^{cx}$?

同样：

$$g(xy) = g(x) + g(y),$$

$$g(x) = \ln x?$$

[访问主页](#)[标题页](#)

第 21 页 共 29 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



系统科学研究所

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

访问主页

标题页



第 22 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出

解: 由 $f(x+y) = f(x)f(y)$ 得 ($f(0) = 1$):

$$\frac{f(x+y) - f(x)}{y} = f(x) \frac{f(y) - f(0)}{y}$$

令 $y \rightarrow 0$

$$f'(x) = f(x)f'(0)$$

故: $f(x) = e^{f'(0)x}$.

6 线性相关性

已知:

$$3x - 5y + 2z = -4,$$

$$7x - 4y - 3z = 3,$$

求:

$$5x + 7y - 12z = (18),$$

$$15x - 2y - 13z = (17),$$

$$x + y + z = (?),$$

$$x + 2y + 3z = (?).$$



系统科学研究所

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

访问主页

标题页



第 23 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出



系统科学研究所

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

7 多项式重根

定理1. 如果 $(x - a)^k | f(x)$, 则 $(x - a)^{k-1} | f'(x)$.

($(x - a)$ 为 $f(x)$ 的 k 重因式 $\Rightarrow (x - a)$ 为 $f'(x)$ 的 $k - 1$ 重因式)

推论1. $(x - a)$ 为 $f(x)$ 的重因式, 当且仅当 $(x - a)$ 为 $f(x), f'(x)$ 的公因式.

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 24 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出



例1. 给出 $f(x) = x^2 + ax + b = 0$ 存在重根的充要条件.

解: $f'(x) = 2x + a = 2(x + \frac{a}{2})$

求公因式 $f(x) \div f'(x)$:

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{2})f'(x) + b - (\frac{a}{2})^2$$

如果 c 为重根 $\Rightarrow x - c \mid f(x), f'(x) \Rightarrow x - c \mid b - \frac{a^2}{4}$

$$\Rightarrow b - \frac{a^2}{4} = 0. \Rightarrow \Delta = a^2 - 4b = 0.$$

[访问主页](#)[标题页](#)

第 25 页 共 29 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



系统科学研究所

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

例2. 求 $f(x) = x^3 + (a - 2)x^2 + (1 - 2a)x + a$ 有三重根的条件.

解: $\because f'(x) = 3x^2 + 2(a - 2)x + (1 - 2a), f''(x) = 6x + 2(a - 2).$

$(x - c)^3 | f(x) \Rightarrow (x - c)^2 | f'(x) \Rightarrow (x - c) | f''(x) \Rightarrow f'(x), f''(x)$ 有公根

$\Rightarrow f''(x) = 0$ 的解使 $f'(x) = 0 \Rightarrow (a + 1)^2 = 0 \Rightarrow a = -1.$

访问主页

标题页

◀ ▶

◀ ▶

第 26 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出

8 归纳法举例

插曲1. (疯狗判定问题):

有一村落

1. 每家养一只狗,每天遛狗一次(同时);
2. 主人只能辨别别人的狗是否为疯;
3. 实际每只狗为疯;
4. 一旦发现(判断)自己狗为疯,则猎杀.

某一天,一路人:至少有一疯狗.

问题: 结果会怎样?

解答: $n = 2, 3$ 易解. 一般 n ?

[访问主页](#)[标题页](#)[◀](#) [▶](#)[◀](#) [▶](#)

第 27 页 共 29 页

[返回](#)[全屏显示](#)[关闭](#)[退出](#)



系统科学研究所

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

访问主页

标题页



第 28 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出

插曲2. (连续自然数判定)

由甲分别提供二连续自然数给乙, 丙

(乙、丙只知道自己的数且知道连续, 乙、丙同等聪明)

然后由甲连续提问:知不知道?

当问过若干次以后,乙、丙二人之一必定知道对方数字!

问题: 为什么?

例: 4895, 4896.



系统科学研究所

公理化论证欣赏

三角函数

算术平均与几何平均

复数与开根号

函数方程

线性相关性

多项式重根

归纳法举例

访问主页

标题页



第 29 页 共 29 页

返回

全屏显示

关闭

退出

谢 谢!